

数学核心素养的内涵及其体系构建

吕世虎¹, 吴振英^{1,2}

(1. 西北师范大学 教育学院, 兰州 730070; 2. 肇庆学院 数学与统计学院, 肇庆 526060)

摘要:数学核心素养的体系可划分为由低到高的四个层面: 数学双基层、问题解决层、数学思维层、数学精神层, 这四个层面从低到高, 逐次递进, 构成了一个相互联系、密不可分的整体。双基层是数学核心素养体系的基础; 问题解决层以“双基层”中的知识和技能为基础和工具, 连接着双基层和数学思维层, 具有承上启下的作用; 数学思维层以双基层为依托、问题解决层为平台, 对具体的数学知识与方法进行了更深层次的内化; 数学精神层是数学双基层、问题解决层、数学思维层的深化和升华, 也是数学核心素养体系形成和持续发展的动力机制。

关键词:数学核心素养; 内涵; 体系构建

中图分类号:G633.6 **文献标志码:**A **文章编号:**1000-0186(2017)09-0012-06

构建综合性、立体式的数学核心素养体系是有序、高效地落实数学核心素养的重要保障。然而, 目前我国数学教育界对“数学核心素养体系”虽有所探讨, 但尚未达成共识, 对于数学核心素养内涵的界定及构成要素仍存在分歧, 这无疑会影响数学核心素养的培养和落实。

一、数学核心素养的内涵

对数学核心素养的讨论离不开数学素养。在我国数学教育界, 对数学素养的讨论由来已久, 早在 1956 年, 《数学通报》刊登的一篇苏联文献译稿中就出现了数学素养一词。此后, 讨论数学素养的文献在我国虽有出现, 但并未引起人们的重视。20 世纪 80 年代中后期, 随着素质教育的

推行, 数学素质的提法随之出现。张奠宙提出数学素质应包括数学意识、问题解决、逻辑推理和信息交流四个部分。^[1]然而, 根据心理学的相关理论, 素质是不可教的, 只能成为教育的必要基础, 不能构成教育的目标和内容, 所以数学素质的提法不够准确。^[2]1986 年, 美国数学教师协会(NCTM) 拟定的学校数学课程改革将数学素养作为课程与教学的中心议题, 将“懂得数学的价值、对自己的数学能力有信心、有解决数学课题的能力、学会数学交流、学会数学的思想方法”作为具备数学素养的标志。^[3]而我国于 1992 年首次在官方文件《初级中学数学教学大纲》中提出“数学素养”一词。进入 21 世纪, 国际上一系列评估项目(如 PISA 和 TIMSS)对数学素养进

基金项目: 全国教育科学“十二五”规划 2011 年度教育部重点课题“改革开放以来中国中小学数学课程发展史研究”(GIA117002)

收稿日期: 2017-06-20

作者简介: 吕世虎, 1963 年生, 甘肃平凉人, 西北师范大学教育学院教授、博士生导师, 主要从事数学教育史、数学课程与教学论、教师教育等研究; 吴振英, 1977 年生, 女, 山西原平人, 西北师范大学教育学院在读博士, 广东肇庆学院数学与统计学院讲师, 主要从事数学课程与教学论、教师教育等研究。

行了量化性考核，引发了人们对数学素养的研究。如今，数学素养作为现代社会公民的基本素养，已写进我国的数学课程标准。何小亚通过对国内有关数学素养研究成果的梳理，认为目前包括数学知识、数学能力和数学情感态度价值观的多维度数学素养观已成为人们的共识，但这三要素结构在落实中不好具体区分，导致素养难以有效落实。可以说，数学新课程改革实施了十余年，但素质教育仍没有真正得到落实，数学教学中数学素养的缺失是一大原因。^[4]基于对国内数学素养研究现状的反思、数学素养在实际落实过程中所存在的问题以及以学科课程为载体来落实核心素养的大背景需要，自2015年起，我们将关注点开始转向数学核心素养，期望在剖析数学学科本质和价值的基础上，明确哪些数学素养对学生的终身发展是最为关键和必要的，反思学生在数学中应获得的教育教学结果，从而更有效地开展数学教学及学习评价。

目前关于数学核心素养的内涵及构成要素的研究大致经历了如下发展过程：1. 以高中数学课程标准修订组史宁中教授为代表的学者对数学核心素养进行了描述性定义。史宁中用“三会”（会用数学的眼光观察现实世界、会用数学的思维思考现实世界、会用数学的语言表达现实世界）来概括数学核心素养的精髓。陈敏、吴宝莹在其文章中也提出过类似观点。^[5]这种表述较为全面地阐释了数学核心素养的本质，但对其构成要素没有详细划分，因而在实践中可操作性不强，落实起来较困难。2. 高中数学课程标准修订组对数学核心素养的构成进行了详细划分，认为数学核心素养是具有数学基本特征的、适应个人终身发展和社会发展需要的人的关键能力与思维品质，包括数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析。这六个构成要素是由义务教育阶段数学课程标准的“十大核心词”提炼而来，在内涵和外延上具有独立性，非常清晰，较好地凸显了数学学科的本质，在逻辑上也构成一个有机体。然而，它更像是核心素养所应具备的“要素集”，且从表述上看更像是六种数学能力，难以反映数学核心素养的全貌。马云鹏在其文章中将数学核心素养定义为：学生学习数学应当达到的有特定意义的综合性能力。^[6]

这种定义与高中课程标准修订组的观点类似，都偏重“数学能力”，对数学学科独特的育人价值凸显不够。3. 以张奠宙为代表的学者对数学核心素养中情感、态度、价值观的重要性进行了强调。张奠宙认为，把核心素养说成六种能力，这种提法在概念上不能很好相容。数学核心素养，包括情感态度、价值观，不只是数学能力。^[7]在此基础上，一些学者对数学核心素养的构成要素进行了细致划分，体现了对数学人文价值和理性精神的重视，但对数学核心素养认识上存在的分歧使得其分类标准多样化。个别分类混乱，不够清晰，难以有较强的说服力。为使数学核心素养的内涵更加清晰，各个指标维度的界定更加科学合理，有必要对数学核心素养的内涵和构成要素进行更深入的研究。

对数学核心素养的界定要体现多维度取向，凸显情感、态度、价值观在数学核心素养中的重要性，并强调知识与技能、过程与方法、情感态度三者之间的整合以及与情境之间的互动。因此，我们在整合数学核心素养相关研究的基础上，认为数学核心素养是个体从数学的角度观察事物，并借助数学知识与思想方法解决数学学习或者现实生活情境中相关问题的综合能力以及个体所持有的数学情感态度、价值观等。它是个体在数学学习过程中形成并获得的，对数学化地思考与解决实际问题、进行有效的数学表达与交流起关键性支撑作用的数学素养。它不仅表现在对纯数学知识与技能的拥有量等显性方面，还表现在数学化地思考和解决问题时所展现出来的品质、能力及精神风貌等隐性方面。具体来说，数学核心素养主要包含数学知识与技能、问题解决能力、数学思维以及数学精神等，虽然彼此之间可能交叉融合，难以辨清，但均有助于个体在知识社会中提升认识问题的高度，和谐发展。

二、数学核心素养体系的构建

数学核心素养是数学课程目标的集中体现，是在数学学习的过程中形成的，内隐性和不易传递性决定了这是一个长期的、渐进的过程。因此，构建一个操作性强的数学核心素养体系对于数学核心素养的有序落实尤为重要。

目前学术界有关数学核心素养构成的研究偏

重其中的“数学能力”，对于数学核心素养是否包含显性的数学基础知识与基本技能（“双基”）并未达成共识，以至于“双基”在数学核心素养的研究中易被忽视，在数学核心素养的培养和落实中也难以发挥有效作用。由于数学核心素养中内隐品格的培养需要以知识技能为基础和载体，有计划、按阶段地逐步实现，如果缺乏有效的数学知识技能作为支撑，个体就很难真正拥有情感、态度等较高层次的数学核心素养。同时，知识与能力也具有不可分割的内在联系，能力的发展取决于具体的知识内容结构，只有与一定的内容相结合，能力才有意义^[8]，将知识技能与能力的提升同核心素养的习得割裂开来是不现实的。基于此，我们认为，“双基层”作为数学核心素养生成的本原，应成为数学核心素养体系中的重要组成部分。

南京师范大学李艺、钟柏昌给出了学科核心素养的三层架构图：最底层为“双基层”，以基础知识和基本技能为核心；中间层为“问题解决层”，以解决问题过程中所获得的基本方法为核心；最上层为“学科思维层”，指在系统的学科学习中通过体验、认识及内化等过程逐步形成相对稳定的思考问题、解决问题的思维方法和价值观，实质上是初步得到学科特定的认识世界和改造世界的世界观和方法论。^[9]这清晰地阐释了学科核心素养的结构与层次，强调了学科的思维价值，然而对学科在育人方面的作用和价值关注不够。聚焦于人终身发展的品格与能力，凸显情感、态度、价值观的重要性是当前核心素养提出的主要目的之一，并且素养的本质是一种修养，故个体只有把学科学习过程中的知识与技能、问题解决、学科思维上升到精神层面，素养才具有终极意义。因此，“数学精神层”也应作为数学核心素养体系的重要组成部分。

此外，数学思维品质虽然是个体在数学学科学习过程中生成的重要品格，但难以涵盖个体通过数学学习所生成的全部品格，特别是难以囊括诸如数学情感、意志、兴趣等人文形态的数学精神。

基于此，我们结合数学核心素养的内涵以及相关的数学认知理论，从数学的认识论价值、应用价值、思维价值与育人价值入手，将数学核心素养的体系划分为由低到高的四个层面：数学双

基层、问题解决层、数学思维层、数学精神层，构建了“数学核心素养体系塔”（见图1）。数学核心素养体系的建构有不同视角，我们从数学教育情境中学生数学核心素养形成与发展的视角来构建数学核心素养体系，其目的在于有效促进数学核心素养的培养与落实。该体系以高中数学课标修订组提出的六个核心要素为基础，向下引申出了数学双基层，向上拓展出了数学精神层，既包含数学核心素养的显性方面（知识与技能），也包括隐性方面（应用数学解决问题的能力、数学思维以及数学精神等）。下面分别对这四个层面的具体内容进行说明。

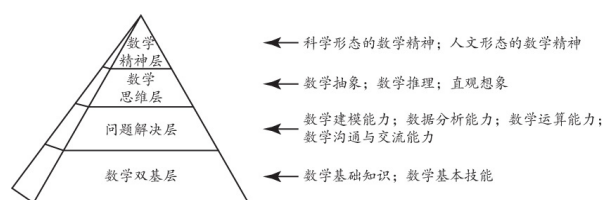


图1 数学核心素养体系塔

（一）数学双基层

“数学双基层”主要包括个体在21世纪生存和发展所必需的数学基础知识和基本技能。其中，基础知识多为数学课程中的核心数学内容（如概念、命题和理论等），基本技能则是个体在掌握和理解数学知识的基础上形成的程序化的操作性活动方式和心智活动方式，如一定的运算（估算）技能、测量技能、认图或画图技能、基本的证明技能、简单的数据处理技能等。数学基本技能是数学能力形成的基础，本身具有较强的机械性，可迁移性差，只有经历问题解决的过程，才能逐步转化为个体自身的数学能力。“数学双基层”中的基础知识和基本技能旨在解答较为常规的数学问题或者简单的实际问题，并为学生形成解决问题的意识与能力奠定基础。它是个体利用数学来解决问题的基础和工具，也是形成数学思维乃至数学精神的载体，对数学核心素养的生成和发展具有重要作用。将“双基层”纳入数学核心素养体系，有利于从庞杂的数学知识体系中厘清核心的数学知识架构，使教学能够聚焦数学核心素养中的知识，且最大程度地促进和提升个体的数学核心素养。

（二）问题解决层

“问题解决层”主要包括识别和发现复杂情

境中所蕴含的数学问题，并能灵活地运用数学知识和技能分析和解决数学问题，故在具体的情境中利用数学知识技能来探求问题解决方案的过程，有助于个体通过“做数学”“用数学”的实践活动累积数学活动经验，密切数学与实践的联系，凸显数学的应用价值，加深对数学的理解。在问题解决层，待解决的问题多为非结构性和开放性的，因此，需要个体具有较多的原创性和探索性。在借鉴高中数学课程标准拟定的数学核心素养的六个主要构成要素的基础上，我们从数学学科的实际出发，构建了问题解决层面的数学核心素养，主要包括：数学建模能力、数据分析能力、数学运算能力以及数学沟通与交流能力。由于沟通与交流能力是当前许多国际组织、国家及地区都重视的核心素养，所以在数学课程标准中把“学会数学交流”作为解决实际问题的重要能力之一，而我国台湾地区也把落实“语言表达与符号应用”这一核心素养视为数学学科的主要任务之一。^[10]因此我们认为，流畅地使用数学语言来解释、表达、交流相关信息并与他人沟通交流，应作为数学核心素养的重要组成部分，应将“数学沟通与交流能力”纳入问题解决层面的数学核心素养之中。

1. 数学建模能力

数学建模能力是指通过建立数学模型，将实际问题转化为数学问题，在求解得出数学结论后根据具体情境，对数学解释进行解读与检验，从而改进模型，最终解决问题的能力。数学建模借助模型进一步密切了数学与相关学科、数学与生活的联系，更好地实现了个体、数学和社会生活三者的结合与互动，对于形成个体的数学核心素养具有重要作用。它一方面有助于个体更好地识别具体情境中所蕴含的数学本质，将数学理论及思维方式通过迁移和辐射应用于现实生活，另一方面则有助于个体在解决实际问题的建模过程中加深和丰富对数学的理解，体验数学的应用价值。

2. 数据分析能力

数据分析能力是指较合理地收集、判别、整合及运用信息和数据的能力。在大数据时代，从海量信息和数据中获取和整合有效信息，并利用相关统计手段来挖掘和提升数据的信息价值，已

成为现代公民应具备的基本素养。它有助于个体养成基于数据思考问题的习惯，并提升基于数学表达现实问题的能力，更理性地进行思考和决策。

3. 数学运算能力

数学运算能力是指能够根据法则和运算律准确地进行运算，并较好地理解运算的算理，寻求合理简洁运算途径的能力。它是运算技能和逻辑思维的有效整合，有助于个体程序化思考问题能力的形成以及逻辑推理能力的提升。同时，运算过程中对通性通法和简洁算法的追求还可以使个体的思维更加灵活，运算更加优化。

4. 数学沟通与交流能力

数学沟通与交流能力是指应用数学语言来描述和表征生活中所观察到的现象，并以书面语言或口头语言的方式来表达、解释与交流对数学知识、思想和观念的理解的能力。数学沟通与交流是个体在探索数学或者应用数学解决实际问题的过程中，对数学信息的接受、加工和传递，它不仅有助于加深个体对数学的理解，促进数学在生活中的应用，也有利于学生以数学为工具，更充分地表达自己的思想、认知和情感。

（三）数学思维层

“数学思维层”主要包括个体在经历系统的数学学习和利用数学知识与方法解决特定情境中的问题后，通过体验、认识、内化形成较为稳定的数学化地理解问题和解决问题的思维方式。基于以理性思维为主要构成的数学思维在数学核心素养中的独特地位，有必要将数学思维层作为数学核心素养体系的重要构成部分。由于数学思维主要体现为抽象、逻辑和直观思维，我们构建了数学核心素养的数学思维层面，主要包含数学抽象、数学推理和直观想象。

1. 数学抽象

数学抽象是指能够从数学角度识别并归纳出问题情境中所蕴含的数学规律或数学问题，并用数学语言准确表述。由于一切数学对象都是思维的产物，所以数学抽象是数学最本质的特征，它贯穿数学发生、发展和应用的整个过程。如：数学概念是经过多次抽象后，脱离现实原型而形成的一种纯思维的构造物；数学命题是概念经过逻辑组合后形成的更高级抽象物；数学中的法则、

公式是对一类事物共性的抽象；数学建模则是从量的方面对事物进行抽象。数学抽象使数学知识和思维方法更具有通用性，有助于培养个体的抽象概括能力，使之更好地透过现象看本质和共性。

2. 数学推理

数学推理是由一个或几个数学命题推导出另一个未知命题的思维形式，主要包括演绎推理和合情推理。其中，演绎推理是根据已有的事实和正确的结论（包括定义、公理、定理等），按照严格的逻辑法则得到新结论的推理过程，它是验证猜想、证明结论的重要手段，注重运用事实和逻辑进行推理和论证的严密性，有助于个体形成尊重事实和证据的理性精神，更合理地进行决策。合情推理则是根据已有的事实和正确的结论（包括定义、公理、定理等）、实验和实践的结果以及个人的经验和直觉等推测某些结果的推理过程。借助合情推理得到的结果仍需要通过演绎推理或逻辑证明来验证其正确性，但作为获得猜想、发现结论的重要方式，合情推理有助于培养个体大胆猜想、勇于创造的探索精神。

3. 直观想象

直观想象是借助空间想象感知事物的形态与变化，利用图形描述和思考问题的思维形式，主要包括空间想象、直观洞察、数形结合。作为数学世界中依托“一维、二维、三维空间”来研究和思考“高维空间”中相关问题的可靠凭借，直观想象有助于个体拓展解决问题的思路，促进知识的有效迁移，提升判断能力。

（四）数学精神层

“数学精神层”主要包括个体通过对数学的深度理解和把握，将自身对数学的理解与认识内化而形成的科学形态的数学精神和人文形态的数学精神。它们均有助于个体品质和价值观念的形成，促进其精神成长。数学精神作为数学核心素养的精髓，不再拘泥于具体的数学学科和情境，而具有较强的可迁移性，对于提升《中国学生发展核心素养》中所提及的科学精神、人文底蕴等核心素养具有不可替代的作用。正如常珊珊、李家清认为，如果不能把基础教育中的数学课程与人的思维发展、人的理性发展以及人的信仰和态度生成联系起来，数学课程就不可能走向人的课

程。^[11]因此，在构建学生数学核心素养体系的过程中，不仅要强调数学的思维价值和工具价值，重视数学在人类认识和改造客观世界中所发挥的作用，还要关注数学独特的育人功能，注重数学对人精神层面的滋养。

基于詹国樑及黄秦安、邹慧超等学者对数学精神的论述与分类标准^[12-14]，我们构建了数学核心素养的数学精神层面，主要包括：科学形态的数学精神和人文形态的数学精神。

科学形态的数学精神，即个体在数学学习和数学问题解决过程中所形成的普适性的思维方式、思维策略等认知心理因素。如日本著名数学教育家米山国藏在其著作《数学的精神、思想和方法》中提出的应用化精神、扩张化—一般化精神、组织化—系统化精神、统一建设精神、严密化精神、思想经济化精神等均为科学形态的数学精神。科学形态的数学精神，其形成多基于数学自身的科学性和逻辑性，较为客观。它有助于个体发展思维能力，完善认知结构，形成缜密而有条件的思维方式，统筹优化意识、对规则和条件的遵从意识等。

人文形态的数学精神，即个体在数学学习和数学问题解决过程中所形成的数学观以及由此衍生的数学情感、意志、兴趣等非认知心理因素。人文形态的数学精神，其形成多基于个体的主观体验与感受，具有较强的个人色彩。积极的人文形态的数学精神能够为个体数学核心素养的形成和提升提供持续的动力和保证，也有助于激发、促进和指导个体的数学思维活动。

科学形态的数学精神和人文形态的数学精神并没有截然分明的界限，而求真、求善、求美则是两者彼此渗透和融合的升华，这是数学精神的最高层次。数学精神对于形成人类理性和促进人类智力发展以及完善个体的人格具有独特的、不可替代的作用。

在数学核心素养体系中，“数学双基层”“问题解决层”“数学思维层”和“数学精神层”不是并列、各自独立的，而是从低到高，逐次递进，构成了一个相互联系、密不可分的整体。双基层是数学核心素养体系的基础；问题解决层以“双基层”中的知识和技能为基础和工具，连接着双基层和数学思维层，具有承上启下的作用。

借助复杂情境下问题的解决,使个体对数学的理解由浅层次的双基层提升到了更深层次的数学思维层;数学思维层以双基层为依托、问题解决层为平台,对具体的数学知识与方法进行了更深层次的内化;数学精神层是数学双基层、问题解决层、数学思维层的深化和升华,也是数学核心素养体系形成和持续发展的动力机制。因此,在某种程度上,数学核心素养体系是一个自我循环、螺旋式上升的动态系统。在数学核心素养体系中,数学思维的培养需要以双基为载体,数学精神的形成则要以问题解决为抓手,在问题解决过程中体验、感悟。如果失去了对数学思维和数学精神的关注,则问题解决和“双基”就缺乏了对人的精神层面的抚慰和激励,人便沦为了工匠。此外,数学核心素养体系的构建不能仅立足于现在,而应具有前瞻性,其具体指标与内容应随着社会发展的变化而变化,为学生更好地适应未来生活和自身的终身发展奠定良好基础。

参考文献:

[1] 张奠宙. 数学教育研究导引 [M]. 南京: 江苏教育出版社, 1994: 2.
 [2] 王策三, 孙喜亭, 刘硕. 基础教育改革论 [M]. 北京: 知识产权出版社, 2005: 24.
 [3] 王广辉. PISA 视角下的数学素养及其教育启示 [J]. 教育科学论坛, 2012 (9): 11-13.

[4] 何小亚. 学生“数学素养”指标的理论分析 [J]. 数学教育学报, 2015, 24 (1): 13-19.
 [5] 陈敏, 吴宝莹. 数学核心素养的培养——从教学过程的维度 [J]. 教育研究与评论, 2015 (4): 44-49.
 [6] 马云鹏. 关于数学核心素养的几个问题 [J]. 课程·教材·教法, 2015, 35 (9): 36-39.
 [7] 洪燕君, 周九诗, 王尚志, 鲍建生. 《普通高中数学课程标准(修订稿)》的意见征询——访谈张奠宙先生 [J]. 数学教育学报, 2015, 24 (3): 35-39.
 [8] 瞿葆奎, 施良方. “形式教育”论与“实质教育”(下) [J]. 华东师范大学学报(教育科学版), 1988 (2): 27-41.
 [9] 李艺, 钟柏昌. 谈“核心素养” [J]. 教育研究, 2015 (9): 17-23.
 [10] 解建团, 汪明. 基于核心素养的课程体系构建 [J]. 当代教育与文化, 2016 (4): 25-29.
 [11] 常珊珊, 李家清. 课程改革深化背景下的核心素养体系构建 [J]. 课程·教材·教法, 2015, 35 (9): 29-35.
 [12] 詹国樑. 论数学精神及其教育价值 [J]. 教育发展研究, 2001 (11): 74-76.
 [13] 黄秦安, 邹慧超. 数学的人文精神及其数学教育价值 [J]. 数学教育学报, 2006, 15 (4): 6-10.
 [14] 黄秦安. 对数学教育研究文化视角的若干透视 [J]. 数学教育学报, 2006, 15 (2): 18-21.

(责任编辑: 李冰)

The Connotation and the System Construction on Mathematics Core Literacy

Lv Shihu¹, Wu Zhenying^{1,2}

(1. College of Education, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu 730070

2. School of Mathematics and Statistics, Zhao Qing University, Zhao Qing Guangdong 526060)

Abstract: This study constructed a system for mathematics core literacy which included mathematics double-basis layer, problem solving layer, mathematical thinking layer and spiritual concept layer. These layers are not separate, but a whole of interrelation and inseparability from lower to higher. Double-basis layer is the foundation of mathematics core literacy; Problem solving layer bases on the knowledge and skills of double-basis layer and links double-basis layer and mathematical thinking layer; Mathematical thinking layer is based on double-basis, taking problem solving as the platform and deepening and specifying the mathematical knowledge and methods; Spiritual concept layer deepens the former three layers, working as mechanism to forming and developing mathematics core literacy.

Key words: mathematics core literacy; connotation; construction of system